Μάθημα 2ο 14/10/15

Πολυδιάστατες τμ. και κατανομές

ΟΡΙΣΜΟΣ: n-διάστατη τυχαία μεταβλητή ή τ. διάνυσμα είναι μια μονοσήμαντη συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα δειγματοχώρο S και πεδίο τιμών ένα υποσύνολο του Ευκλείδειου χώρου των n διαστάσεων ($\mathbb{R}^n$)

$\underset{\sim}{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$ ή $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)'$ ή $\underset{\sim}{X} = (X_1, \ldots, X_n)$

$n=2$: $(X_1, X_2) = (X, Y)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

1) $X_1 \equiv$ Μαθηματικά, $X_2 \equiv$ Ελληνικά, $X_3 \equiv$ αριθμός απουσιών

(X_1, X_2, X_3)

2) Ρίχνουμε 2 ζάρια.

$S = \{(\cdot,\cdot), (\cdot, :), (:, \cdot), \ldots, (:::, :::)\}$ 36 ζεύγη αποτελεσμάτων.

(i) $(X_1, X_2) \equiv (X_1 =$ αποτέλεσμα του ενός ζαριού, $X_2 =$ αποτέλεσμα του άλλου$)$.

(X_1, X_2) με τιμές (i, j), $i, j = 1, \ldots, 6$.

(ii) $(X, Y) \equiv (X =$ αριθμός των φορών που ήρθε άσσος; $Y =$ αριθμός των φορών που ήρθε διπλ

(X, Y) με τιμές $\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1), (2,0), (0,2)\}$.

Διακριτές πολυδιάστατες τ.μ. και κατανομές

Αν το σύνολο των τιμών των τ.μ. $\underset{\sim}{X}$ είναι το πολύ αριθμήσιμο, δηλ. αν οι $X_1, \ldots$ είναι διακριτές τ.μ. τότε το τ.δ. $\underset{\sim}{X}$ είναι ένα διακριτό τ.δ. ή μια n-διάστατη διακριτή τ.μ..

Η συνάρτηση πιθανότητας ενός διακριτού τ.δ. προκύπτει από την πιθανότητα πραγματοποίησης του ενδεχομένου $\{X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n\}$, όπου x_i; $i = 1, \ldots,$ πραγματοποιήσιμη τιμή της τ.μ. X_i, δηλ. $P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = P_{X_1, \ldots, X_n}(x_1, \ldots, x_n) = P(X_1 = x_1, \ldots, X_n =$

λέγεται από κοινού συνάρτηση πιθανότητας (κατανομή) της n-διάστατης τ.μ. $\underset{\sim}{X}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ: $P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) \geq 0$, $\sum_{x_1,\dots,x_n} P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = 1$.

Περιθωριακή τ.μ. και κατανομή

$$P_{X_i}(x_i) = P(X_i = x_i) = \sum_{x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n} P(X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}, X_i = x_i, X_{i+1} = x_{i+1}, \dots, X_n = x_n)$$

$$(X_1, X_2) \sim P_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \rightsquigarrow X_1 \sim \sum_{x_2} P_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$$

Αθροιστική συνάρτηση κατανομής

$$F_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n) = \sum_{y_1 \leq x_1, \dots, y_n \leq x_n} P_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{y})$$

Δεσμευμένη τ.μ. και κατανομή

$n=2$ και (X_1, X_2) τ.μ. ενδιαφέρει το ενδεχόμενο $\{X_1 = x_1 | X_2 = x_2\}$
Η τ.μ. $X_1 | X_2 = x_2$ ή $X_1|X_2$ λέγεται δεσμευμένη τ.μ. X_1 δοθέντος το X_2 (δοθείσης της X_2) και η κατανομή της δίνεται από τη σχέση:

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{P_{X_2}(x_2)}, \quad P_{X_2}(x_2) > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2(i): (από παραπάνω)

τ.μ. (X_1, X_2) με τιμές (x_1, x_2), $x_1, x_2 = 1, \dots,$

$$P_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \frac{1}{36}$$

$$P_{X_1}(x_1) = \sum_{x_2=1}^{6} P_{X_1,X_2}(x_1,x_2), \quad x_1 = 1, \dots, 6$$
$$= 1/6$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2(ii):

$Y \backslash X$	0	1	2	$P_Y(y)$
0	$\frac{16}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{1}{36}$	$25/36$
1	$\frac{8}{36}$	$\frac{2}{36}$		$10/36$
2	$\frac{1}{36}$			$1/36$
$P_X(x)$	$25/36$	$10/36$	$1/36$	$36/36=1$

$(X,Y) \sim$ Πολυωνυμική (M) $\left(n=2,\ p_x=\frac{1}{6},\ p_y=\frac{1}{6}\right)$
Τριωνυμική

$X \sim Bin(n=2,\ p_x=1/6)$ (Διωνυμική)

$X|Y=0 \sim P_{X|Y=0}(x|y=0)=;$

$$P_{X|Y}(0|0)=\frac{P(0,0)}{P_Y(0)}=\frac{16}{36}\cdot\frac{36}{25}=\frac{16}{25}=\binom{2}{0}\left(\frac{1}{5}\right)^0\left(\frac{4}{5}\right)^2$$

$$P_{X|Y}(1|0)=\frac{P(1,0)}{P_Y(0)}=\frac{8/36}{25/36}=\frac{8}{25}$$

$$P_{X|Y}(2|0)=\frac{P(2,0)}{P_Y(0)}=\frac{1/36}{25/36}=\frac{1}{25}$$

$$X|Y \sim Bin\left(n-y,\ \frac{p_x}{1-p_y}\right) \equiv \left(2-0,\ p=\frac{1/6}{1-\frac{1}{6}}=\frac{1}{5}\right)$$

Πολυδιάστατες συνεχείς τ.μ. και κατανομές

Αν $P(\underset{\sim}{X}=\underset{\sim}{x})=0 \ \forall \underset{\sim}{x}$ τότε το τ.δ. $\underset{\sim}{X}$ είναι ένα συνεχές τ.δ.

Αν $f_{\underset{\sim}{X}}(\underset{\sim}{x}) \geq 0$ πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το πεδίο τιμών της $\underset{\sim}{X}$

και $P(X_1 \in \Delta_1, \ldots, X_n \in \Delta_n)=\int \cdots \int f_X(x)\,dx_1 \cdots dx_n \quad \forall \Delta_i$ της X_i, τότε η $f_{\underline{X}}(\underline{x})$ είναι η σ.π.π. ή από κοινού κατανομή του $\underline{X}$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f_{\underline{X}}(\underline{x})\,dx_1\cdots dx_n = 1.$$

Κατανομή περιθωρίου της X_i: $f_{X_i}(x_i) = \int_{x_n}\cdots\int_{x_1} f_{\underline{X}}(\underline{x})\,dx_1\cdots dx_{i-1}\,dx_{i+1}\cdots dx_n$

Η από κοινού α.σ.κ της $\underline{X}$: $F_{\underline{X}}(\underline{x}) = P(X_1 \le x_1, \ldots, X_n \le x_n) =$

$$= \int_{-\infty}^{x_n}\cdots\int_{-\infty}^{x_1} f_{\underline{X}}(\underline{y})\,dy_1\cdots dy_n$$

$$F_{X_i}(x_i) = F_{X_1,\ldots,X_n}(\infty,\ldots,x_i,\ldots,\infty)$$

Δεσμευμένη τ.μ. και σ.π.π

(X,Y) συνεχή τ.μ. με σ.π.π. $f_{X,Y}(x,y)$ ενδιαφέρει η τ.μ. $X|Y=y$
$X|Y=y$ ή $X|Y \sim f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$, $f_Y(y)>0$.

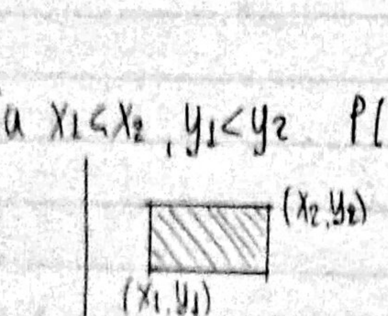
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ:

1) $0 \le F_{X,Y}(x,y) \le 1$

2) $F_{X,Y}(x,y)$ μη φθίνουσα για κάθε μεταβλητή της, δηλ. $x_1<x_2$ και $y_1<y_2$
$\leadsto F(x_1,y_1) \le F(x_2,y_2)$

3) $F_{X,Y}(x,y)$ συνεχής από δεξιά για κάθε μεταβλητή και $\lim_{h\to 0} F(x+h,y) = \lim_{h\to 0} F(x,y+h) =$
$= F(x,y)$

4) Για $x_1<x_2$, $y_1<y_2$ $P(x_1<X<x_2,\ y_1<Y<y_2) = F(x_2,y_2) - F(x_1,y_2) - F(x_2,y_1) + F(x_1,y_1)$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

1) $F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = (1-e^{-x_1})(1-e^{x_2})$, $x_1,x_2>0$

$F_{X_1}(x_1) = F_{X_1,X_2}(x_1,\infty) = 1-e^{-x_1}$, $x_1>0$

$f_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \dfrac{d^2 F_{X_1,X_2}(x_1,x_2)}{dx_1\, dx_2} = e^{-x_1}e^{-x_2} = e^{-(x_1+x_2)}$, $x_1,x_2>0$

2) $f(x,y) = k(x+y)$, $0<x,y<1$

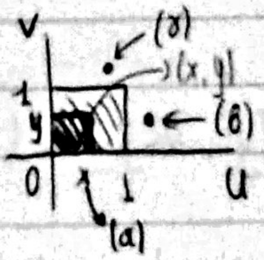
$\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x,y)\,dx\,dy = 1 \rightsquigarrow \int_0^1\int_0^1 k(x+y)\,dy\,dx = 1 \rightsquigarrow k=1$

$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)\,dy = x+\frac{1}{2}$, $0<x<1$

$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)} = \dfrac{x+y}{x+1/2}$, $0<x,y<1$

$F_{Y|X}(y|x) = \int_0^y \dfrac{x+y}{x+1/2}\,dy = \dfrac{xy+y^2/2}{x+1/2}$, $0<x,y<1$

$F_{X,Y}(x,y) = 0$, $x,y<0$



$F_{X,Y}(x,y) = 1$, $x>1$ και $y>1$

(α) $F_{X,Y}(x,y) = \int_0^x\int_0^y (u+v)\,dv\,du = \frac{1}{2}(x^2y+y^2x)$, $0<x<1$, $0<y<1$.

(β) $= \int_0^1\int_0^y (u+v)\,dv\,du = \frac{1}{2}(y+y^2)$, $x>1$, $0<y<1$

(γ) $= \int_0^1\int_0^x (u+v)\,du\,dv = \frac{1}{2}(x^2+x)$, $0<x<1$, $y>1$

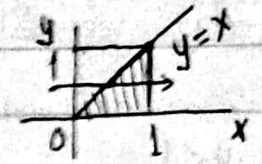
3) $f_{X,Y,Z}(x,y,z) = (x+y)e^{-z}$, $0<x,y<1$, $z>0$

$$f_{X,Z}(x,z)=\int_0^1 (x+y)e^{-z}dy=\left(x+\frac{1}{2}\right)e^{-z}, \quad 0<x<1,\ z>0$$

$$f_{X,Y}(x,y)=\int_0^\infty (x+y)e^{-z}dz=x+y, \quad 0<x,y<1$$

$$f_X(x)=\int_0^1 (x+y)\,dy=x+\frac{1}{2}, \quad 0<x<1.$$

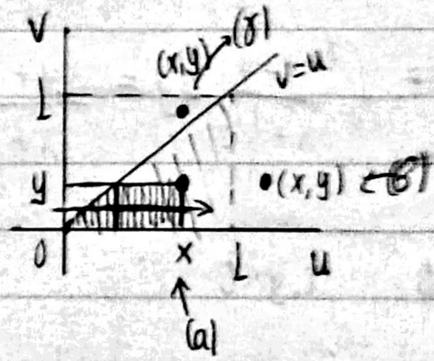
4) $f(x,y)=3x, \quad 0<y<x<1$



$$f_X(x)=\int_0^x 3x\,dy=3x^2, \quad 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_y^1 3x\,dx=3\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right), \quad 0<y<1$$

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{3x}{3\left(\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\right)}=\frac{2x}{1-y^2}, \quad 0<y<x<1.$$



$F_{X,Y}(x,y)=0$, $x<0$ ή $y<0$

$F_{X,Y}(x,y)=1$, $x>1$ και $y>1$.

(α) $$F_{X,Y}(x,y)=\int_0^y\int_v^x 3u\,du\,dv=\frac{3}{2}x^2y-\frac{1}{2}y^3, \quad 0<y<x<1$$

(β) $$=\int_0^y\int_v^1 3u\,du\,dv=\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}y^3, \quad x>1 \text{ και } y<1$$

(γ) $$=\int_0^x\int_0^u 3u\,dv\,du=x^3, \quad 0<x<1,\ y>x \text{ και } y<1.$$

Θεώρημα Ολικής Πιθανότητας: $B_1, \dots, B_k$, k ασυμβίβαστα μεταξύ τους ενδεχόμενα με $S=B_1\cup\dots\cup B_k$ και $P(B_i)>0$, $i=1,\dots,k$

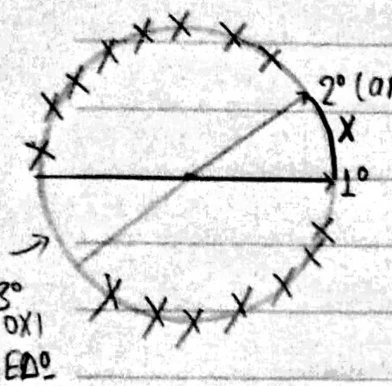
$\forall A: P(A)=\sum_{i=1}^{k} P(A|B_i)=\sum_1^k P(A|B_i)P(B_i)$

για $B_i = \{X = x\}$, $X \sim P_X(x)$, $X \sim f_X(x)$

$$P(A) = \sum_x P(A \mid X = x)\, P_X(x)$$

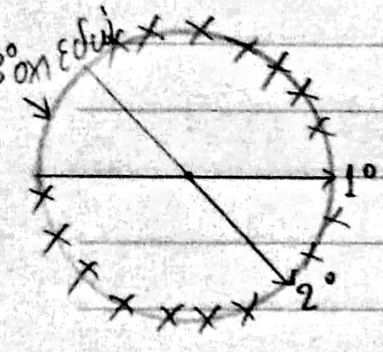
$$P(A) = \int_x P(A \mid X = x)\, f_X(x)\, dx$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Τρία σημεία στην περιφέρεια κύκλου, A το ενδεχόμενο να βρίσκονται σε ημικύκλιο. Να βρεθεί η P(A).



$0 < x < 2\pi$ και $X \sim f_X(x) = \dfrac{1}{2\pi}$

Για $0 < x < \pi$: $P(A \mid X = x) = \dfrac{2\pi - x}{2\pi}$



Για $\pi < x < 2\pi$: $P(A \mid X = x) = \dfrac{x}{2\pi}$

$$P(A) = \int_0^{2\pi} P(A \mid X = x)\, \frac{1}{2\pi}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{2\pi - x}{2\pi}\, dx + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi} \frac{x}{2\pi}\, dx = \frac{3}{4}$$